15 - лекция. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

15 - лекция.

15.1 Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

Анықтама Егер сызықты дифференциалдық теңдеудегі:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

коэффиценттері деп аталатын барлық a_i, $i = \overline{1,n}$ - тұрақты сандар болса, онда ол тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

15.2. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер

Оң жағы нөлге тең болатын теңдеулер жүйесінің фундаменталдық шешімдер жүйесін табайық:

$$L[y]=0 \qquad (2).$$

Оның дербес шешімін $y = e^{kx}$ түрінде іздейміз, мұндағы k - қандай да бір тұрақты. Осы тұрақтыны табалық. (2)-ге $y = e^{kx}$ қойсақ:

$$L\left[e^{kx}\right] = e^{kx}\left(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n\right) = 0 .$$

$\forall x:\ e^{kx} \neq 0$ болғандықтан, $y = e^{kx}$ (2) теңдеуінің шешімі болады, егер k сипаттамалық деп аталатын мынадай алгебралық теңдеудің түбірі болса:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0 .$$

$n = 2$ жағдайы үшін фундаменталдық шешімдер жүйесін табу мәселесіне тоқталайық:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (3)$$

Бұл теңдеудің сипаттамалық теңдеуі былай болады:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (4)$$

Ол алгебралық квадраттық теңдеу болғандықтан, мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

1) $D = p^2 - 4q > 0$. Онда $k_1 \neq k_2$ - (4) теңдеуінің нақты түбірлері. $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = e^{k_2 x}$ дербес шешімдері фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды, себебі

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} \cdot (k_2 - k) \neq 0$$, өйткені $k_1 \neq k_2$.

Сызықты теңдеулердің жалпы теориясын қолданып, (3) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (5)$$

2) $D = p^2 - 4q < 0$. Түбірлері түйіндес комплекс сандар: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Теңдеудің дербес шешімдері былай болады: $y_{1,2} = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i \sin\beta x)$.

Сызықты операторлардың қасиеттерінен: $L[U(x) + iV(x)] \Rightarrow L[U] + iL[V] \equiv 0 \Rightarrow L[U] = 0$ және $L[V] = 0$ екендігі шығады, яғни, теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$ функцияларынан тұрады. Ендеше, теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x \pm C_2 \sin\beta x\right) \qquad (6)$$

3) $D = p^2 - 4q = 0$. Онда $k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}$. Тек бір ғана шешім табамыз: $y_1 = e^{kx}$. Бірінші шешім y_1-ге тәуелсіз теңдеудің екінші шешімін табамыз. Шешімді $y_2 = U(x)e^{kx}$ түрінде іздейміз.

$$L[y] = e^{kx} \cdot \left[u'' + (2k + p)u' + (k^2 + pk + q)\right] \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = Ax + B \Rightarrow |A = 1,\ B = 0| \Rightarrow u = x .$$

15 - лекция. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі мына түрде болады: $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, себебі W[y_1, y_2] $\neq 0$. Онда берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} \qquad (7)$$

Сонымен, жалпы жағдайда, (2) теңдеуінің шешімін алу үшін:
1) сипаттамалық теңдеуін құру және оны шешу
2) теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесін табу:

А) әрбір бір еселі k нақты түбіріне $y = e^{kx}$ дербес шешімі сәйкес келеді.

Б) Бір еселі әрбір $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ комплекс түбірлер жұбына $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ екі дербес шешім сәйкес келеді.

В) әрбір r - еселі k нақты түбіріне r дербес шешім сәйкес келеді:
$y = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, $y_3 = x^2 e^{kx}$, $\ldots$, $x^{r-1}e^{kx}$.

Г) әрбір r -еселі $k = \alpha \pm i\beta$ комплекс түбірлеріне $2r$ шешім сәйкес келеді:

$y_1 = e^{kx}\cos\beta x$, $y_2 = xe^{kx}\cos\beta x$, $y_3 = x^2 e^{kx}\cos\beta x$, $\ldots$, $y_r = x^{r-1}e^{kx}\cos\beta x$,

$\bar{y}_1 = e^{kx}\sin\beta x$, $\bar{y}_2 = xe^{kx}\sin\beta x$, $\bar{y}_3 = x^2 e^{kx}\sin\beta x$, $\ldots$, $\bar{y}_r = x^{r-1}e^{kx}\sin\beta x$,

Дербес шешімдердің саны тура n-ге тең және олар фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды.

3) жалпы шешімін жазу: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

15.3.Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер

Тұрақты коэффицентті және оң жағы квазиполином (көрсеткіштік функцияға көбейтілген көпмүшелік) деп аталатын $f(x)$ функциясы болатын дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін тұрақты шаманы вариациалау әдісін қолданбай, басқа оңай әдіспен шығаруға болады.

$P_n(x)$ және $Q_m(x)$ сәйкесінше n -ші және m -ші дәрежелі көпмүшеліктер, ал r саны сипаттамалық теңдеудің түбірі α $(\alpha \pm i\beta)$ -ның еселігі болсын, егер α $(\alpha \pm i\beta)$ сипаттамалық теңдеудің түбірі болмаса, онда $r = 0$.

Егер

1. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, онда дербес шешімді мына түрде іздейміз:

$$y^* = x^r \overline{P}_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (8)$$

мұндағы $\overline{P}_n(x)$ - коэффицентері белгісіз көпмүшелік.

2. $f(x) = [P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, онда

$$\bar{y} = x^r [U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, \qquad (9)$$

мұндағы $k = max(n, m)$, ал U_k және V_k - коэффицентері белгісіз көпмүшеліктер.

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.
3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008
4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.